Интернет-журнал «Отходы и ресурсы» <https://resources.today>
Russian Journal of Resources, Conservation and Recycling

2020, №1, Том 7 / 2020, No 1, Vol 7 <https://resources.today/issue-1-2020.html>

URL статьи: <https://resources.today/PDF/16INOR120.pdf>

DOI: 10.15862/16INOR120 (<http://dx.doi.org/10.15862/16INOR120>)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Повитухин С.А., Гусева Е.Н., Стащук П.В. Дискретизация нестационарной пространственной модели, описывающей процесс затвердевания слитка в кристаллизаторе машины непрерывного литья заготовок // Интернет-журнал «Отходы и ресурсы», 2020 №1, <https://resources.today/PDF/16INOR120.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/16INOR120

For citation:

Povitukhin S.A., Guseva E.N., Stashchuk P.V. (2020). Discretization of an unsteady spatial model describing the solidification process of an ingot in a mold of a continuous casting machine. *Russian Journal of Resources, Conservation and Recycling*, [online] 1(7). Available at: <https://resources.today/PDF/16INOR120.pdf> (in Russian) DOI: 10.15862/16INOR120

УДК 621.74.047:519.633.2

ГРНТИ 53.07

Повитухин Сергей Алексеевич

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет технологии и управления
им. Г.К. Разумовского (ПКУ)», Москва, Россия

Доцент кафедры «Информационные системы и технологии»

Кандидат технических наук

E-mail: serge2410@yandex.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1690-7921>

РИНЦ: https://www.elibrary.ru/author_profile.asp?id=553609

Гусева Елена Николаевна

ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова», Магнитогорск, Россия

Доцент кафедры «Бизнес-информатики и информационных технологий»

Кандидат педагогических наук, доцент

E-mail: kellymy7@rambler.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2783-2187>

РИНЦ: https://www.elibrary.ru/author_profile.asp?id=306677

Стащук Петр Владимирович

ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова», Магнитогорск, Россия

Доцент кафедры «Бизнес-информатики и информационных технологий»

Кандидат технических наук, доцент

E-mail: s_ptr@rambler.ru

РИНЦ: http://elibrary.ru/author_profile.asp?id=442786

Дискретизация нестационарной пространственной модели, описывающей процесс затвердевания слитка в кристаллизаторе машины непрерывного литья заготовок

Аннотация. Машины непрерывного литья заготовок (МНЛЗ) обеспечивают высокое качество металла. Оптимизация технологических процессов, в настоящее время, не может основываться только на эмпирическом подходе, основанном на обобщении производственного опыта. Это связано с тем, что каждая МНЛЗ представляет собой сложную техническую систему со своей спецификой и особенностями.

Совершенствование технологии непрерывной разливки основываются, в первую очередь, на создании математических моделей, описывающих технологические процессы с учетом множества технологических и конструктивных факторов. При моделировании процессов кристаллизации, большинство исследователей, с целью упрощения решения задачи, рассматривают стационарные плоскопараллельные модели. Такие модели не могут хорошо описать исследуемое явление в принципе и поэтому имеют ограниченную область применения. Следовательно, разработка методов решения нестационарной пространственной модели непрерывной разливки представляет большой научный интерес и расширяет возможности решения очень сложных краевых задач с фазовыми переходами.

Метод конечных элементов (МКЭ) является одним из наиболее универсальных численных методов решения дифференциальных и интегральных уравнений и их систем. МКЭ приводит к системе алгебраических уравнений.

В статье приводится описание применения МКЭ для численного моделирования процесса затвердевания слитка в кристаллизаторе МНЛЗ, с целью проведения вычислительных экспериментов. Представлен процесс дискретизации системы дифференциальных уравнений и области решения задачи. Кроме того, описан алгоритм конечноразностной аппроксимации нестационарных членов уравнений. Для дискретизации области используются трехмерные конечные элементы в форме параллелепипеда с узлами, расположенными в вершинах элементов. Решение находится на пространстве кусочно-линейных функций.

Ключевые слова: математическая модель; метод конечных элементов; МКЭ; кристаллизация; непрерывное литье; МНЛЗ

Введение

При непрерывной разливке жидкий металл заливают в кристаллизатор – интенсивно охлаждаемую сквозную, обычно медную, форму. Формирование начальной корочки слитка и создания профиля заготовки является основным назначением кристаллизатора.

Охлаждение кристаллизатора обеспечивается водой, протекающей в его стенках через сверленные каналы. Тепло, выделяющееся при кристаллизации металла, и поступившее в стенку кристаллизатора, отводится водой. В результате разливки образуется непрерывный слиток.

Из анализа литературных источников следует, что при рассмотрении процессов, происходящих в кристаллизаторе МНЛЗ, обычно рассматриваются двухмерные, а иногда, и одномерные модели. Так как наиболее интенсивное охлаждение слитка в основном происходит через боковые стенки кристаллизатора, математическая модель должна учитывать информацию о температурах ребер слитка, как зон наибольшего градиента температур, и тепловые потоки в приреберной зоне по всей высоте рабочей зоны кристаллизатора. Таким образом, для адекватного описания процесса образования слитка в кристаллизаторе надо решать пространственную задачу. Принципиальная схема кристаллизатора приведена на рисунке 1.

Рисунок 1. Принципиальная схема кристаллизатора (рисунок авторов [1])

Начало координат расположено на зеркале металла в центре слитка, ось z направлена вниз, по направлению вытягивания слитка [1; 2].

Постановка задачи кристаллизации слитка

Обобщенное уравнение теплопроводности в безразмерной формулировке имеет вид (предполагается, что ρ, c, λ являются функциями температуры):

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = Fo \nabla (\lambda \nabla T) - Ho \rho c \vec{v} \nabla T \quad (1)$$

где принято:

- безразмерные величины: $t = t'/t_0$, $\vec{r} = \vec{r}'/l_0$, $T = T'/T_0$, $c = c'/c_0$, $\vec{v} = \vec{v}'/v_0$,

$$\rho c = \begin{cases} \rho_m c_m, & T < T_{\text{сол}} \text{ или } T > T_{\text{лик}}; \\ \rho_n \left(c_n + N \frac{d\Psi}{dT} \right), & T_{\text{сол}} < T < T_{\text{лик}}; \end{cases}$$

$$\rho = \rho'/\rho_0, \quad \lambda = \lambda'/\lambda_0,$$

- параметр агрегатного состояния, соответствующий объемной доле жидкой фазы в двухфазной зоне. Определяется по равновесной диаграмме конкретного

$$\Psi(T) = \begin{cases} 0, & T < T_{\text{сол}}; \\ \Psi(T) = V_{\text{жс}}/V_{\text{э}}, & T_{\text{сол}} < T < T_{\text{лик}}; \\ 1, & T > T_{\text{лик}}; \end{cases}$$

материала:

- критерий Фурье: $Fo = \lambda_0 t_0 / \rho_0 c_0 l_0^2$;
- критерий гомохромности: $Ho = v_0 t_0 / l_0$;

- критерий, характеризующий процесс затвердевания: $N = \kappa_{y\partial} / c_0 T_0$;
- удельная теплота плавления: $\kappa_{y\partial}$;
- скорость вытягивания слитка: $\vec{v} = (0, 0, v_c)$;
- индексы: m , n , указывают коэффициенты для металла (жидкого и затвердевшего) и переходной зоны соответственно.

Остальные обозначения в приведенном уравнении носят общепринятый характер (в скобках указана размерность величины):

- температура (солидуса и ликвидуса): T [K];
- удельная теплоемкость: $c \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{K}} \right]$;
- удельная плотность: $\rho \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$;
- коэффициент теплопроводности: $\lambda \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{K}} \right]$;
- удельная теплота плавления: $\kappa_{y\partial} \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \right]$;
- скорость движения частицы: $\vec{v} \left[\frac{\text{м}}{\text{с}} \right]$;
- оператор Гамильтона: ∇ .

В дальнейшем также будут использованы дополнительные обозначения: L_x, L_y – размеры слитка, расстояние от центра слитка до его боковой поверхности; L_z – длина рабочей зоны кристаллизатора, т. е. расстояние от зеркала металла до нижней кромки кристаллизатора.

Приведем начальные и граничные условия в безразмерном виде [1]:

- начальная температура равна температуре перегрева (T_{nep}) разливаемого металла:

$$T_m(x, y, z, 0) = T_{nep} ; \quad (2)$$

- температура сплава на зеркале металла, поверхность G_3 , равна T_{nep} :

$$T_3(x, y, 0, t) = T_{nep} ; \quad (3)$$

- на нижней кромке кристаллизатора, поверхность G_z , тепловой поток отсутствует, т. е. равен нулю:

$$\frac{\partial T(x, y, z_0, t)}{\partial z} = 0 ; \quad (4)$$

- на границе наружной поверхности отливки, поверхности G_{en} , заданы потоки тепла:

$$\lambda_m \frac{\partial T_m(x_0, y, z, t)}{\partial x} = q_x \text{ и } \lambda_m \frac{\partial T_m(x, y_0, z, t)}{\partial y} = q_y; \quad (5)$$

• Для плоскостей симметрии слитка xOz и yOz , проходящих через центр слитка, тепловые потоки так же отсутствуют:

$$\frac{\partial T(0, y, z, t)}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{\partial T(x, 0, z, t)}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Методы

1. Дискретизация системы дифференциальных уравнений

Основой метода конечных элементов (МКЭ), основные положения которого описаны в [3–6], является замена непрерывной модели ее дискретной моделью. Причем аппроксимируется как сама функция, так и область ее определения Ω .

Применим МКЭ, к системе дифференциальных уравнений (1–6). Используем метод Галеркина, т. е. примем: $W_l = N_l$, а $V_l = -N_l|_r$. Здесь весовые функции W_l и V_l связаны между собой, но это не меняет положения. Тогда соответствующим дискретным аппроксимирующим уравнением будет:

$$\iiint_{\Omega} W_l \left(F_0 \nabla (\lambda \nabla T) - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - H_0 \rho c \bar{v} \nabla T \right) d\Omega + \iint_S V_l \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} - q \right) dS = 0.$$

Интегрируя первое слагаемое в интеграле по области, по частям, перепишем выражение в виде, который называют слабой формулировкой:

$$- \iiint_{\Omega} (F_0 \lambda \nabla W_l \nabla T) d\Omega + \iint_S \left(W_l \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right) dS - \iiint_{\Omega} W_l \left(\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + H_0 \rho c \bar{v} \nabla T \right) d\Omega + \iint_S V_l \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} - q \right) dS = 0. \quad (7)$$

Область определения функции Ω приближенно представим в виде совокупности конечного числа непересекающихся подобластей Ω^e (конечных элементов), связанных между

собой в узлах на границах подобластей: $\bigcup_{e=1}^E \Omega^e = \Omega$. Используемые в процессе аппроксимации базисные функции могут быть определены кусочным образом. В таком случае определенные интегралы, входящие в аппроксимирующее уравнение (7), могут быть получены простым суммированием их вклада по каждой подобласти.

Дискретная модель включает в себя множество значений искомой функции на некотором конечном числе точек (глобальных узлов) области ее определения. Примем согласно

[3; 6] частичную дискретизацию для температуры: $\bar{T} = \sum_{m=1}^M T_m(t) N_m(x, y, z)$, где M – число узлов дискретизации. Отметим, что здесь базисные функции N_m зависят только от координат, а значения функции T_m только от времени.

Принимая, что: $\bigcup_{e=1}^E \Omega^e = \Omega$ и $\bigcup_{e=1}^E S^e = S$ для граничных элементов из соотношения (7) получим:

$$\iiint_{\Omega} (\lambda \nabla N_l \nabla \bar{T}) d\Omega + \iiint_{\Omega} \left(N_l F \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + Ho \bar{v} \nabla \bar{T} \right] \right) d\Omega = \iint_S (N_l q_y) dS$$

или

$$\sum_{e=1}^E \iiint_{\Omega^e} (\lambda \nabla N_l \nabla \bar{T}) d\Omega + \sum_{e=1}^E \iiint_{\Omega^e} \left(N_l F \left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + Ho \bar{v} \nabla \bar{T} \right] \right) d\Omega = \sum_{e=1}^E \iint_{S^e} (N_l q_y) dS \quad (8)$$

Здесь приняты обозначения:

E – общее число подобластей, на которые разбивается вся область;

Ω^e – объем элемента e ;

S^e – часть границы Ω^e , лежащая на S ;

$F - F = \rho c / Fo$.

Отметим, что интеграл по поверхности S^e в равенстве (8) будет появляться только для элементов, боковые поверхности которых, лежат на поверхностях слитка, граничащих со стенками кристаллизатора.

Подставляя аппроксимацию $\sum_{m=1}^M T_m N_m$, приходим к системе уравнений:

$$K \tilde{T} = B,$$

где $\tilde{T}$ – вектор значений температур в узлах сетки дискретизации.

Компоненты глобальной матрицы K и вектора правой части B определяются суммированием вкладов отдельных элементов:

$$K_{lm}^e = \iiint_{\Omega^e} \left[\lambda \nabla N_l^e \nabla N_m^e + N_l^e F \left(N_m^e \frac{d}{dt} + Ho \bar{v} \nabla N_m^e \right) \right] d\Omega^e,$$

$$B_l^e = \iint_{S^e} N_l^e q_y dS^e. \quad (9)$$

В условии (5) примем, что на узкой грани слитка тепловой поток отсутствует $q_x = 0$, а на широкой грани слитка исходящий тепловой поток задан в виде $q_y = f(z)$, значения которого будут взяты из литературы.

Так же примем, что величины, входящие в интегралы из (9), постоянны по подобласти и равны их значению в центре элемента, тогда получаем:

$$\iiint_{\Omega^e} \lambda \nabla N_l^e \nabla N_m^e d\Omega^e \approx \lambda_c^e \iiint_{\Omega^e} \nabla N_l^e \nabla N_m^e dx^e dy^e dz^e,$$

$$\iiint_{\Omega^e} \left(N_l^e F N_m^e \frac{d}{dt} \right) d\Omega^e \approx F_c^e \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega^e} N_l^e N_m^e dx^e dy^e dz^e,$$

$$\iiint_{\Omega^e} N_l^e F Ho \bar{v} \nabla N_m^e d\Omega^e \approx Ho F_c^e \bar{v}_c^e \iiint_{\Omega^e} N_l^e \nabla N_m^e dx^e dy^e dz^e.$$

Следовательно, необходимо вычислять локальные матрицы, коэффициенты которых заданы как интегралы вида:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \iiint_{\Omega^e} N_l^e N_m^e dx^e dy^e dz^e = N^l N^m ; \\
 2. \quad & \iiint_{\Omega^e} N_l^e \nabla N_m^e dx^e dy^e dz^e = \\
 & \bar{i} \iiint_{\Omega^e} N_l^e \frac{\partial N_m^e}{\partial x} dx^e dy^e dz^e + \bar{j} \iiint_{\Omega^e} N_l^e \frac{\partial N_m^e}{\partial y} dx^e dy^e dz^e + \bar{k} \iiint_{\Omega^e} N_l^e \frac{\partial N_m^e}{\partial z} dx^e dy^e dz^e = \\
 & \bar{i} N^l N_{dx}^m + \bar{j} N^l N_{dy}^m + \bar{k} N^l N_{dz}^m ; \\
 3. \quad & \iiint_{\Omega^e} \nabla N_l^e \nabla N_m^e dx^e dy^e dz^e = \\
 & \iiint_{\Omega^e} \frac{\partial N_l^e}{\partial x} \frac{\partial N_m^e}{\partial x} dx^e dy^e dz^e + \iiint_{\Omega^e} \frac{\partial N_l^e}{\partial y} \frac{\partial N_m^e}{\partial y} dx^e dy^e dz^e + \iiint_{\Omega^e} \frac{\partial N_l^e}{\partial z} \frac{\partial N_m^e}{\partial z} dx^e dy^e dz^e = \\
 & N_{dx}^l N_{dx}^m + N_{dy}^l N_{dy}^m + N_{dz}^l N_{dz}^m .
 \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения:

- $\nabla N_l = \frac{\partial N_l}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial N_l}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial N_l}{\partial z} \bar{k} ;$
- $\nabla N_l \nabla N_m = \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial y} + \frac{\partial N_l}{\partial z} \frac{\partial N_m}{\partial z} .$

2. Дискретизация области решения

В случае трех измерений (рисунок 2) аппроксимирующие функции Лагранжа, при реализации трилинейной интерполяции с элементами в форме кирпичиков, имеющими по восемь узлов.

Рисунок 2. Восьмиузловой шестигранный элемент (рисунок авторов)

Как видно, в элемент вносят свои вклады только восемь членов, а аппроксимирующая функция $N_l(\xi, \eta, \kappa)$ приобретает форму:

$$N_l(\xi, \eta, \kappa) = \frac{(1 - \xi_l \xi)}{2} \frac{(1 - \eta_l \eta)}{2} \frac{(1 - \kappa_l \kappa)}{2} ,$$

где: значения ξ_l, η_l, κ_l принимают значения ± 1 , а значения локальных координат

равны: $\xi = \frac{2(x - x_c^e)}{h_x^e}$, $\eta = \frac{2(y - y_c^e)}{h_y^e}$, $\kappa = \frac{2(z - z_c^e)}{h_z^e}$. Тогда имеем:

- $d\xi = 2/h_x^e dx$, $d\eta = 2/h_y^e dy$, $d\kappa = 2/h_z^e dz$;
- $N_l(\xi, \eta, \kappa) = (1 - \xi_l \xi)/2(1 - \eta_l \eta)/2(1 - \kappa_l \kappa)/2$, где значения ξ_l, η_l, κ_l для локальных узлов (1–8) приведены в [3; 5];
- частные производные имеют вид: $\frac{\partial N_l(\xi, \eta, \kappa)}{\partial \xi} = \frac{\xi_l}{8}(1 - \eta_l \eta)(1 - \kappa_l \kappa)$,
 $\frac{\partial N_l(\xi, \eta, \kappa)}{\partial \eta} = \frac{\eta_l}{8}(1 - \xi_l \xi)(1 - \kappa_l \kappa)$ и $\frac{\partial N_l(\xi, \eta, \kappa)}{\partial \kappa} = \frac{\kappa_l}{8}(1 - \xi_l \xi)(1 - \eta_l \eta)$.

Теперь получим соотношения, которые и будут использоваться для вычисления интегралов. Это нетрудно сделать, если выполнять численное интегрирование независимо по направлениям ξ, η, κ . Тогда:

1. Интегралы вида:
$$N^l N^m = \iiint_{\Omega^e} N_l^e N_m^e dx^e dy^e dz^e =$$
$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_l^e N_m^e h_x^e/2 d\xi h_y^e/2 d\eta h_z^e/2 d\kappa = h_x^e h_y^e h_z^e/8 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_l^e N_m^e d\xi d\eta d\kappa.$$

2. Интегралы вида:
$$N^l N_{dx}^m = \iiint_{\Omega^e} N_l^e \frac{\partial N_m^e}{\partial x} dx^e dy^e dz^e =$$
$$h_x^e h_y^e h_z^e/8 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_l^e \frac{\partial N_m^e}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} d\xi d\eta d\kappa = \left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| \equiv 2/h_x^e = h_y^e h_z^e/4 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_l^e \frac{\partial N_m^e}{\partial \xi} d\xi d\eta d\kappa.$$

Аналогично получим:

$$N^l N_{dy}^m = \iiint_{\Omega^e} N_l^e \frac{\partial N_m^e}{\partial y} dx^e dy^e dz^e = h_x^e h_z^e/4 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_l^e \frac{\partial N_m^e}{\partial \eta} d\xi d\eta d\kappa,$$

$$N^l N_{dz}^m = \iiint_{\Omega^e} N_l^e \frac{\partial N_m^e}{\partial z} dx^e dy^e dz^e = h_x^e h_y^e/4 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_l^e \frac{\partial N_m^e}{\partial \kappa} d\xi d\eta d\kappa.$$

3. Интегралы вида:
$$N_{dx}^l N_{dx}^m = \iiint_{\Omega^e} \frac{\partial N_l^e}{\partial x} \frac{\partial N_m^e}{\partial x} dx^e dy^e dz^e =$$
$$h_x^e h_y^e h_z^e/8 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_l^e}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial N_m^e}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} d\xi d\eta d\kappa = h_y^e h_z^e/2 h_x^e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_l^e}{\partial \xi} \frac{\partial N_m^e}{\partial \xi} d\xi d\eta d\kappa.$$

Аналогично:

$$N_{dy}^l N_{dy}^m = \iiint_{\Omega^e} \frac{\partial N_l^e}{\partial y} \frac{\partial N_m^e}{\partial y} dx^e dy^e dz^e = h_x^e h_z^e / 2h_y^e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_l^e}{\partial \eta} \frac{\partial N_m^e}{\partial \eta} d\xi d\eta d\kappa,$$

$$N_{dz}^l N_{dz}^m = \iiint_{\Omega^e} \frac{\partial N_l^e}{\partial z} \frac{\partial N_m^e}{\partial z} dx^e dy^e dz^e = h_x^e h_y^e / 2h_z^e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_l^e}{\partial \kappa} \frac{\partial N_m^e}{\partial \kappa} d\xi d\eta d\kappa.$$

Осталось вычислить коэффициенты матриц $N^l N^m$, $N^l N_{dx}^m$, $N^l N_{dy}^m$, $N^l N_{dz}^m$ и $N_{dx}^l N_{dx}^m$, $N_{dy}^l N_{dy}^m$, $N_{dz}^l N_{dz}^m$, входящие в уравнения. Будем их вычислять, применяя квадратурные формулы, описанные в [3; 4; 7]. При получении матриц элементов для элементов высших степеней возрастает сложность подинтегральных выражений, что делает выкладки весьма громоздкими. В этом случае приходится прибегать к численному интегрированию, при котором стандартный интеграл заменяется квадратурной суммой.

Для практического применения часто используют формулы Гаусса-Лежандра, которые аппроксимируют многочлен степени p в n узлах. Положение узлов определено заранее, а

значение функции в узле берется с некоторым весом, т. е.:

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n+1} W_i f(x_i).$$

В [3] приводятся изменения степени p точно интегрируемых многочленов для нескольких первых значений n . Для точного вычисления многочлена степени 5 достаточно вычислить функцию в 3 точках, положение которых задано. Квадратурная формула Гаусса-Лежандра для трех узлов имеет вид [7]:

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{9} [5f(-\sqrt{0.6}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{0.6})],$$

где $x_2 = -x_0 = \sqrt{0.6}$; $x_1 = 0$; $W_0 = W_2 = 5/9$; $W_1 = 8/9$.

Очевидные обобщения квадратур, которые и будут использованы в дальнейшем, на случай трех переменных для интегралов по кубу $-1 \leq \xi, \eta, \kappa \leq 1$ приводят к соотношениям вида:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \kappa) d\xi d\eta d\kappa \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n [W_i W_j W_k f(\xi_i, \eta_j, \kappa_k)].$$

Окончательно, перегруппировав члены в (8), получим:

$$C \frac{d\tilde{T}}{dt} + A\tilde{T} = B.$$

3. Дискретизация нестационарных членов системы дифференциальных уравнений

Пространственные члены обычно предлагается аппроксимировать методом конечных элементов, в то время как временные члены аппроксимируются, почти всегда, методом конечных разностей [3]. Аппроксимируя производную по времени конечными разностями для каждого временного слоя, получим итерационный процесс:

$$C^n \tilde{T}^{n+1} + \Delta t A^n \tilde{T}^{n+1} = \Delta t B^n - C^n \tilde{T}^n \quad (10)$$

где элементы квадратных матриц A^n, C^n и матрицы-столбца B^n определяются следующим образом:

$$C_{lm}^n = \sum_{e=1}^E \iiint_{\Omega^e} F_n^e N_l N_m d\Omega^e$$
$$A_{lm}^n = \sum_{e=1}^E \iiint_{\Omega^e} \left(\lambda_n^e \nabla N_l \nabla N_m + F_n^e H_o \vec{v}^e N_l \nabla N_m \right) d\Omega^e$$
$$B_l^n = \sum_{e=1}^E \iint_{S^e} N_l q_n^e dS^e .$$

4. Дискретизация граничных элементов

Для окончательного формирования алгоритма расчета необходимо вычислить член в правой части (8), соответствующий естественным граничным условиям. Принимая обозначения для поверхности, аналогичные случаю для функции трех координат, получим соотношения:

$$\iint_{S^e} q_y^e N_l dS = q_y^e h_x^e h_z^e / 4 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_l d\xi d\kappa = q_y^e h_x^e h_z^e / 4 . \quad (11)$$

$$\text{Аналогично: } \iint_{S^e} q_x^e N_l dS = q_x^e h_y^e h_z^e / 4 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_l d\eta d\kappa = q_x^e h_y^e h_z^e / 4 .$$

По условиям задачи, в принятой формулировке, поток тепла $q_x^e = 0$, поэтому выражение выполняется тождественно.

Для решения полученной системы алгебраических уравнений (САУ) можно использовать метод релаксации [8]. Записывая метод релаксации в алгебраической форме, имеем:

$$x_i^k = (1 - \omega) x_i^{k-1} + \omega \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} g_{ij} x_j^k + \sum_{j=i+1}^n g_{ij} x_j^{k-1} + d_i \right\} \quad (12)$$

где $g_{ij} = a_{ij} / a_{ii}$, $d_i = f_i / a_{ii}$, а ω – параметр релаксации.

Результаты

Для математической модели процесса кристаллизации слитка в кристаллизаторе МНЛЗ (1–6), на основе МКЭ, получен её дискретный аналог. На основе полученной дискретной модели получен алгоритм, позволяющий численно моделировать сложные тепловые процессы, протекающие в кристаллизаторе МНЛЗ. При этом в процедуре дискретизации дифференциальных уравнений изменяться только уравнения, соответствующие граничным условиям типа (11).

Выводы

Для построения контактной задачи, детально рассматривающей процессы, и в стенке кристаллизатора, и в слитке необходимо определять тепловые потоки на границе между слитком и стенкой кристаллизатора через свойства шлакообразующей смеси (ШОС) [1; 9–11]. Это позволит исключить из формулировки задачи такие трудноопределимые характеристики, как величина теплового потока (5) или коэффициент теплопередачи, зависящие от многих конструктивных и технологических факторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Повитухин С.А. Математическое моделирование процесса охлаждения слитка в кристаллизаторе машины непрерывного литья заготовок // Вестник ТГТУ. 2009. Т. 15, № 3. С. 672–681.
2. Вабищевич, П.Н. Численные методы решения задач со свободной границей / П.Н. Вабищевич. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. – 164 с.
3. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х томах: Т. 1: Пер. с англ. – М. Мир, 1991. – 504 с.
4. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
5. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов: Пер с англ. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
6. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред: Пер. с англ. – М.: Изд-во «Недра», 1974. – 240 с.
7. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – 4-е изд., доп. с добавлением Н.П. Корнейчука. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 224 с.
8. Бахвалов, Н.С. Численные методы: учеб. пособие / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Наука, 1987. – 600 с.
9. Лейтес, А.В. Защита стали в процессе непрерывной разливки / А.В. Лейтес. – М.: Металлургия, 1984. – 200 с.
10. Вдовин, К.Н. Расчет толщины шлакового гарнисажа / К.Н. Вдовин, С.А. Повитухин // Теория и технология металлургического производства: сб. науч. тр. / под ред. В.М. Колокольцева. – Магнитогорск: МГТУ, 2005. – 196 с. – С. 29–32.
11. Вдовин, К.Н. Моделирование толщины и скорости движения гарнисажа в кристаллизаторе МНЛЗ / К.Н. Вдовин, С.А. Повитухин // Автоматизация технологических и производственных процессов в металлургии: межвуз. сб. науч. тр. / под ред. Б.Н. Парсункина. – Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2006. – С. 129–133.

Povitukhin Sergey Alekseevich

Moscow state university of technology and management named after K.G. Razumovsky (the First Cossacs university)
Moscow, Russia
E-mail: serge2410@yandex.ru

Guseva Elena Nikolaevna

Nosov Magnitogorsk state technical university, Magnitogorsk, Russia
E-mail: kellymy7@rambler.ru

Stashchuk Petr Vladimirovich

Nosov Magnitogorsk state technical university, Magnitogorsk, Russia
E-mail: s_ptr@rambler.ru

Discretization of an unsteady spatial model describing the solidification process of an ingot in a mold of a continuous casting machine

Abstract. Continuous casting machines (CCM) provide high quality metal. Optimization of technological processes, at present, cannot be based only on an empirical approach based on a generalization of production experience. This is due to the fact that each caster is a complex technical system with its own specifics and features.

The improvement of continuous casting technology is based, first of all, on the creation of mathematical models describing technological processes taking into account many technological and structural factors. When modeling crystallization processes, most researchers, in order to simplify the solution of the problem, consider stationary plane-parallel models. Such models cannot describe the studied phenomenon well in principle and therefore have a limited scope. Therefore, the development of methods for solving the unsteady spatial model of continuous casting is of great scientific interest and expands the possibilities of solving very complex boundary value problems with phase transitions.

The finite element method (FEM) is one of the most universal numerical methods for solving differential and integral equations and their systems. FEM leads to a system of algebraic equations.

The article describes the use of FEM for numerical modeling of the solidification process of an ingot in a continuous casting mold with the aim of conducting computational experiments. The discretization process of the system of differential equations and the problem solution domain is presented. In addition, an algorithm of finite-difference approximation of non-stationary members of the equations is described. To sample the region, three-dimensional finite elements in the form of a parallelepiped with nodes located at the vertices of the elements are used. The solution is in the space of piecewise linear functions.

Keywords: mathematical model; finite element method; FEM; crystallizer; continuous casting machine

REFERENCES

2. Povitukhin S.A. (2009). Mathematical modeling of the ingot cooling process in the mold of a continuous casting machine. *Bulletin of the Tambov State Technical University*, 3(15), pp. 672–681 (in Russian).
3. Vabishchevich P.N. (1987). Chislennyye metody resheniya zadach so svobodnoy granitsey. [*Numerical methods for solving problems with a free boundary.*] Moscow: Publishing house of Moscow University, p. 164.
4. Fletcher K. (1991). *Computational methods in fluid dynamics: In 2 volumes: Volume 1.* [Russ. ed.: Vychislitel'nye metody v dinamike zhidkostey: V 2-kh tomakh: Tom 1. Moscow: World, p. 504.]
5. Zenkevich O., Morgan K. (1986). *Finite Elements and Approximation.* [Russ. ed.: Konechnyye ehlementy i approksimatsiya. Moscow: World, p. 318.]
6. Norri D., de Friz Zh. (1981). *Finite Element Method Introduction.* [Russ. ed.: Vvedenie v metod konechnykh ehlementov. Moscow: World, p. 304.]
7. Zenkevich O., Chang I. (1974). *The finite element method in the theory of structures and in the mechanics of continuous media.* [Russ. ed.: Metod konechnykh ehlementov v teorii sooruzheniy i v mekhanike sploshnykh sred. Moscow: Nedra Publishing House, p. 240.]
8. Nikol'skiy S.M. (1988). Kvadrurnyye formuly. [*Quadrature formulas.*] Moscow: The science. The main edition of the physical and mathematical literature, p. 224.
9. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. (1987). Chislennyye metody. [*Numerical methods.*] Moscow: The science, p. 600.
10. Leytes A.V. (1984). Zashchita stali v protsesse nepreryvnoy razlivki. [*Steel protection during continuous casting.*] Moscow: Metallurgy, p. 200.
11. Vdovin K.N., Povitukhin S.A. (2005). Raschet tolshchiny shlakovogo garnisazha. [*Calculation of the thickness of the slag skull.*] Magnitogorsk: Magnitogorsk State Technical University named after G.I. Nosova, pp. 29–32.
12. Vdovin K.N., Povitukhin S.A. (2006). Modelirovanie tolshchiny i skorosti dvizheniya garnisazha v kristallizatore MNLZ. [*Modeling the thickness and speed of the skull in the mold CCM.*] Magnitogorsk: Magnitogorsk State Technical University named after G.I. Nosova, pp. 129–133.